

		ESCUELA MILITAR DE INGENIERÍA Unidad Académica La Paz EXAMEN: SEGUNDO PARCIAL					
Apellido, Nombre:							
C.I.:		Carrera:					
Asignatura:	CALCULO II	Semestre:	II/2014	Curso:			
Evaluación:	1er Parcial	2do Parcial	Optativo	Final	2T	Fecha Evaluación	15/10/2014
		X				Tiempo de duración	90 (Minutos)
Revisión:	Fecha:		Hora:		Curso:		
Nombre y Firma Docente(s):							
		VºBº					
CALIFICACIÓN DEL EXAMEN				CALIFICACIÓN REVISADA		Ponderación después de la revisión por parte del estudiante	
Firma del Estudiante:				La firma representa la conformidad por parte del estudiante al examen propuesto.			

PREGUNTAS

- Hallar el dominio y Graficar la imagen o rango de $\vec{f}(t) = \left\{ t, t^2, \sqrt{\frac{(4+t^2)(9-t^2)}{8}} \right\}$
- Sea $\vec{f}(t) = \begin{cases} x(t) = a(\sin^2 t) \\ y(t) = b(\sin t)(\cos t) \\ z(t) = c(\cos^2 t) \end{cases}$; encontrar las ecuaciones del plano Normal en el punto $t = \frac{\pi}{4}$, donde $a, b, c \neq 0$
- De la hélice cónica: $\vec{f}(t) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} t \cos t, \frac{\sqrt{2}}{2} t \sin t, \frac{\sqrt{2}}{2} t \right]$, Hallar la longitud de arco desde $t = 0$ a $t = \sqrt{2}\pi$ (Utilizar el método adecuado de integración)
- Considere el hiperboloide de dos hojas $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{3} - \frac{z^2}{3} = 3$. Encuentre el plano tangente en el punto $(6, 3, 3\sqrt{2})$.
- Si $f(x, y) = \ln \left[\sqrt[p]{\sqrt[4q]{(x^2 + y^2 + xy)}} \right]$ verificar que se cumpla: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{pq}$; $p, q \neq 0$

Solucionario

1 Sea $\vec{P}(t) = \left(t, t^2, \sqrt{\frac{(4+t^2)(9-t^2)}{8}} \right)$

donde:

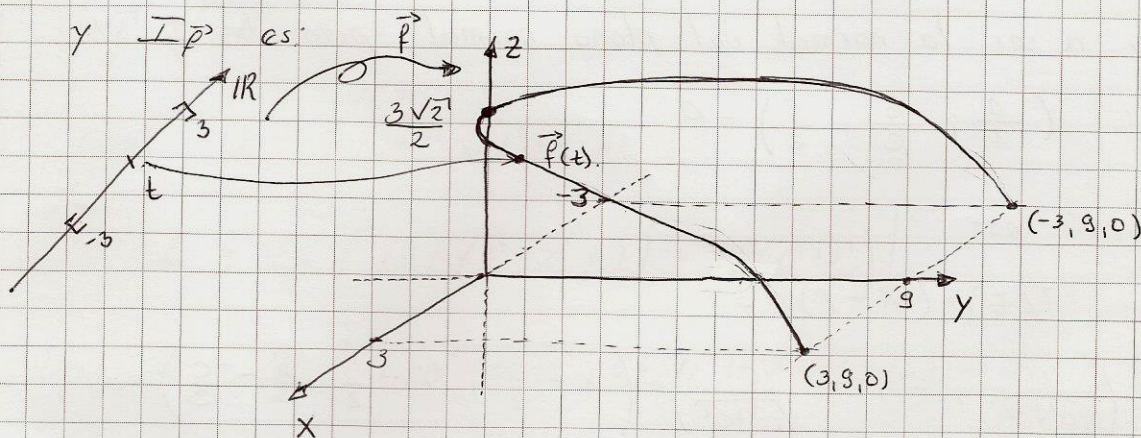
$$P_1(t) = t, P_2(t) = t^2$$

$$y P_3(t) = \sqrt{\frac{(4+t^2)(9-t^2)}{8}}$$

Como $D_{P_1} = \mathbb{R}$, $D_{P_2} = \mathbb{R}$ y $D_{P_3} = [-3, 3]$

$$y \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \cap [-3, 3] = [-3, 3]$$

Entonces $D_{\vec{P}} = [-3, 3]$



CURSO:

ASIGNATURA:

CÓDIGO:

FECHA: EXAMÉN

NOTA

FIRMA

8] Sea $\vec{P}(t) = (a \operatorname{Sen}^2 t, b \operatorname{Sen} t \operatorname{Cos} t, c \operatorname{Cos}^2 t)$; $a, b, c \neq 0$.

$$\Rightarrow \vec{P}'(t) = (2a \operatorname{Sen} t \operatorname{Cos} t, b \operatorname{Cos}^2 t - b \operatorname{Sen}^2 t, -2c \operatorname{Cos} t \operatorname{Sen} t)$$

Para $t = \frac{\pi}{4}$, se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{P}'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(2a \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right), b \operatorname{Cos}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - b \operatorname{Sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right), -2c \operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) \operatorname{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \left(2a \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}, b \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - b \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2, -2c \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= (a, 0, -c)\end{aligned}$$

$$\gamma \|\vec{P}'\left(\frac{\pi}{4}\right)\| = \sqrt{a^2 + c^2}$$

$$\text{de donde } T\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right)$$

que llega a ser la normal del plano normal, para $t = \frac{\pi}{4}$
en el punto: $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = P$

Cuya ecuación es:

$$P_N: T\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (X - P) = 0$$

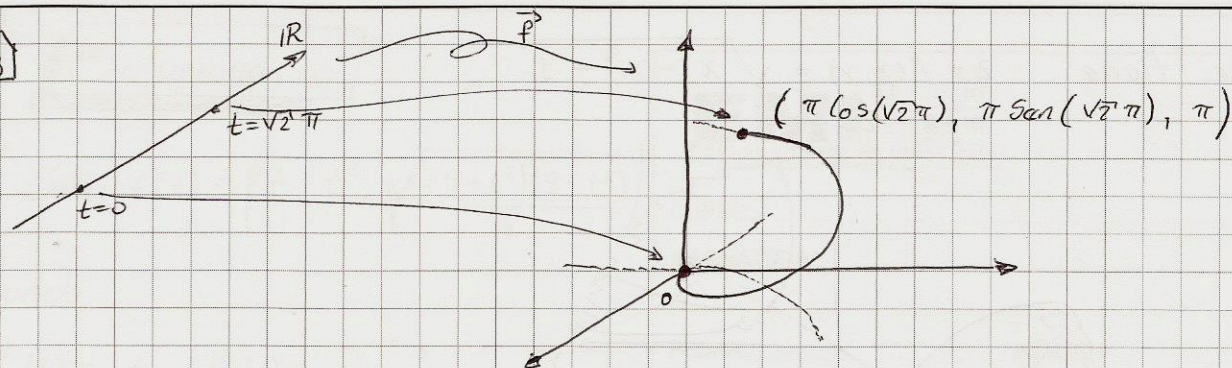
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}}, 0, -\frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}\right) \cdot \left(x - \frac{a}{2}, y - \frac{b}{2}, z - \frac{c}{2}\right) = 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} x - \frac{a^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}} z + \frac{c^2}{2\sqrt{a^2 + c^2}} = 0$$

$$2ax - a^2 - 2cz + c^2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{2ax - 2cz = a^2 - c^2 \leftarrow \text{Ec. } P_N}$$

3



Como:

$$\vec{p}'(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t, 1)$$

de donde la rapidez es:

$$\|\vec{p}'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{t^2 + 2}$$

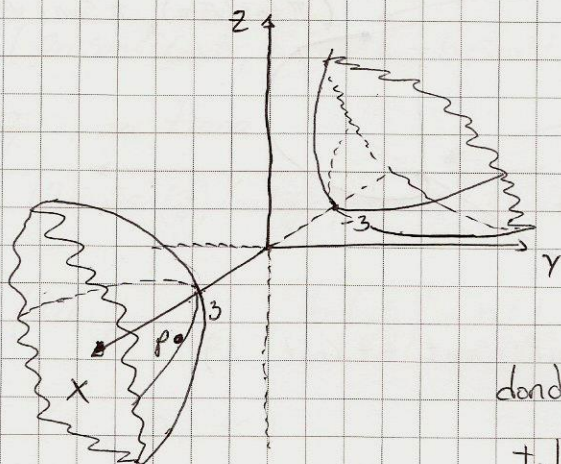
$$\text{Como } L = \int_0^{\sqrt{2}\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{t^2 + 2} dt$$

$$\Rightarrow L = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\ln |\sqrt{t^2 + 2} + t| + \frac{t \sqrt{t^2 + 2}}{2} \right) \Big|_0^{2\pi}$$

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\ln |\sqrt{4\pi^2 + 2} + 2\pi| + \pi \sqrt{4\pi^2 + 2} \right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \sqrt{2}$$

$$\therefore L = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\ln \left(\frac{\sqrt{4\pi^2 + 2} + 2\pi}{\sqrt{2}} \right) + \pi \sqrt{4\pi^2 + 2} \right)$$

4

Se tiene $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2 - 9}$ donde $P = (6, 3, 3\sqrt{2})$ tal que $f(6, 3) = 3\sqrt{2}$ Necesitamos las pendientes $f_x(6, 3)$ y $f_y(6, 3)$, entonces:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2 - 9}} \cdot 2x \Rightarrow f_x(6, 3) = \frac{6}{3\sqrt{2}} \Rightarrow f_x(6, 3) = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - y^2 - 9}} \cdot -2y \Rightarrow f_y(6, 3) = \frac{-3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow f_y(6, 3) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Cuya normal es:

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$$

de donde la ecuación del plano tangente es:

$$P_t: \vec{N} \cdot (X - P) = 0$$

$$\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \cdot (x - 6, y - 3, z - 3\sqrt{2}) = 0$$

$$-\frac{2}{\sqrt{2}}x + \frac{12}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{3}{\sqrt{2}} + z - 3\sqrt{2} = 0$$

$$-2x + 12 + y - 3 + \sqrt{2}z - 6 = 0$$

$$P_t: -2x + y + \sqrt{2}z = -3 \quad \text{ó} \quad P_t: 2x - y - \sqrt{2}z = 3$$

5

Se tiene:

$$f(x, y) = \ln \sqrt[4pq]{x^2 + y^2 + xy}$$

Entonces:

$$f_x(x, y) = \frac{1}{\sqrt[4pq]{x^2 + y^2 + xy}} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + xy)^{\frac{1}{4pq} - 1}}{4pq} \cdot (2x + y)$$

$$\Rightarrow f_x(x, y) = \frac{(x^2 + y^2 + xy)^{\frac{1-4pq}{4pq}}}{4pq} \cdot (2x + y)$$

$$\Rightarrow f_x(x, y) = \frac{2x + y}{(x^2 + y^2 + xy)4pq}$$

$$\Rightarrow x f_x(x, y) = \frac{2x^2 + xy}{4pq(x^2 + y^2 + xy)}$$

De manera análoga:

$$f_y(x, y) = \frac{2y + x}{4pq(x^2 + y^2 + xy)}$$

$$\Rightarrow y f_y(x, y) = \frac{2y^2 + xy}{4pq(x^2 + y^2 + xy)}$$

De donde:

$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \frac{2x^2 + 2xy + 2y^2}{4pq(x^2 + y^2 + xy)} = \frac{1}{2pq} \neq \frac{2}{pq}$$

$$\therefore x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = \frac{1}{2pq} \neq \frac{2}{pq}$$

El integral no converge